UNTERSUCHUNGEN ÜBER DIE AUSBREITUNG VON SIGNALEN IN DISPERGIERENDEN MEDIEN AM AKUSTISCHEN MODELL.

Inauguraldissertation
zur Erlangung des Doktorgrades der
Naturwissenschaftlichen Fakultät der Johann-
Wolfgang-Goethe-Universität
Frankfurt/Main.

Theo Ankel
Wiesbaden
1954

D 30

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547420_0067

ZUSAMMENFASSUNG

Bei der Untersuchung über die Ausbreitung von Wellen ist es notwendig, zwischen zwei Geschwindigkeiten zu unterscheiden: der Phasen- und der Gruppengeschwindigkeit. Während die Phasengeschwindigkeit zur Diskussion von Interferenzphänomenen - d.h. der Überlagerung zeitlich unbegrenzter Wellenzüge verschiedener Phasenlage - herangezogen wird, bleibt die Beschreibung der Fortpflanzung von Signalen - d.h. Wellengruppen endlicher Länge - der Gruppengeschwindigkeit vorbehalten, die in der Form

$$(1) \qquad U = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c}{n + \omega \frac{dn}{d\omega}}$$

bekannt ist. Dabei bedeuten c die Lichtgeschwindigkeit (im optischen Fall), n den Brechungsindex des Mediums, indem die Ausbreitung erfolgt, ω die Kreisfrequenz und k die Wellenzahl.

Legt man dem Folgenden die Ausbreitung optischer Signale zugrunde, so erfährt die Gültigkeit von Gl.(1) als Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Wellengruppen eine Einschränkung ihrer Allgemeinheit; denn für das Gebiet anormaler Dispersion, in dem der Ausdruck $dn/d\omega$ negative Werte annimmt, liefert Gl.(1) eine Gruppengeschwindigkeit grösser als die Lichtgeschwindigkeit und führt damit zu einem Widerspruch zur Relativitätstheorie.

M.v.Laue gibt eine Klärung dieses Widerspruches, indem er nachweist, dass Gl.(1) die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Signalen nur im Gebiet normaler Dispersion richtig darzustellen vermag, während sie im Gebiet anormaler Dispersion ihren physikalischen Sinn verliert. Das Problem wird erneut von A.Sommerfeld aufgegriffen, der zusammen mit L.Brillouin eine strenge mathematische Lösung für die Fortpflanzung eines Lichtsignals vorgegebener Form durch ein dispergierendes Medium angibt.

Zur Theorie von Sommerfeld und Brillouin.

Es wird ein dispergierendes Medium betrachtet, das von der Ebene x = 0 den rechten Halbraum erfüllt. Der Brechungsindex dieses Mediums besitzt die Form

$$(2) \qquad n^2 = 1 + \frac{a^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\rho\omega}$$

Das zu betrachtende Signal fällt als ebene Welle von links her auf das Medium senkrecht auf und wird an der Stelle $x = 0$ im Medium selbst durch die Funktion $f(t)$ beschrieben:

$$(3) \qquad f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad t < 0 \\ \sin \bar{\omega} t & \text{für} \quad t > 0 \end{cases}$$

Gesucht ist die Funktion $f(t)$ an der Stelle x im Medium, denn diese Funktion gibt an, wie der zeitliche Verlauf des Signals an der Stelle x aussieht, d.h. wie das Signal einschwingt und zu welchem Zeitpunkt es eintrifft. Berücksichtigt man, dass sich jede Fourierkomponente des Signals als ebene Welle ausbreitet, so ergibt sich für die gesuchte Funktion $f(t,x)$

$$(4) \qquad f(t,x) = \frac{1}{2\pi} \, \mathrm{Re} \int_{(J)} \frac{e^{-i\omega t + i \frac{\omega}{c} x \sqrt{1 + \frac{a^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\rho\omega}}}}{\omega - \bar{\omega}} \, d\omega$$

wobei der Integrationsweg in der oberen Hälfte der komplexen ω- Ebene von $+\infty$ nach $-\infty$ verläuft.

Die Auswertung dieses Integrals erfolgt nach Brillouin mit Hilfe der Sattelpunktsmethode und führt zu folgenden physikalischen Ergebnissen:

Der Kopf des Signals pflanzt sich immer mit Lichtgeschwindigkeit fort. liegt die Frequenz des Signals $\bar{\omega}$ unterhalb der Eigenfrequenz der Dispersionselektronen des Mediums, so besteht der Einschwingvorgang des Signals aus "Vorläufern 1. Art" - einem oszillierenden Verlauf von sehr hoher, zeitlich sich ändernder Frequenz aber kleiner Amplitude - gefolgt von "Vorläufern 2. Art" - Schwingungen sehr tiefer Frequenz - die allmählich stetig in das wirkliche Signal übergehen. Bei Signalfrequenzen oberhalb der Eigenfrequenz der Elektronen enthält der Einschwingvorgang nur Vorläufer 1. Art, an welche sich das Signal stetig anschliesst. Im Gebiet anormaler Dispersion, d.h. für Signalfrequenzen in der Nähe der Resonanzfrequenz, lässt sich ein Einschwingvorgang nicht mehr erkennen, da die Amplitude des Signals auf Grund der starken Dämpfung die Grössenordnung der Vorläufer annimmt. Als Ankunft des Signals bezeichnet Brillouin den Zeitpunkt t', an welchem das Signal die Hälfte seiner Endamplitude erreicht hat und definiert somit eine "Signalgeschwindigkeit" durch den Quotienten aus zurückgelegter Strecke x und der Zeit t'. Die auf diese Weise festgelegte Signalgeschwindig-

keit bleibt im ganzen Frequenzbereich immer kleiner als die Lichtgeschwindigkeit und stimmt im Gebiet normaler Dispersion mit der Gruppengeschwindigkeit gemäss Gl.(1) überein.

Diese Überlegungen sind rein theoretischer Natur und lassen sich experimentell nicht verifizieren. Es entsprach daher der Anregung von Herrn Prof. Dänzer, ein Modellmedium zu konstruieren, das "optische" Dispersionseigenschaften besitzt und das damit gestattet, die optischen Vorgänge in ein experimentell zugänglicheres Gebiet zu übertragen.

Experimentelle Anordnung.

Die Untersuchungen wurden mit Schallwellen an einem akustischen Modellmedium durchgeführt. Dieses besteht aus einem langen Rohr, an dem in Abständen klein gegen die Wellenlänge der verwandten Schallimpulse untereinander völlig gleiche Helmholtzresonatoren aufgesetzt sind. Die Schallwellen, die durch dieses Rohr geschickt werden, regen die einzelnen aufgesetzten Resonatoren zum Mitschwingen an, wie in der Optik die elektromagnetischen Lichtwellen die Elektronen in erzwungene Schwingungen versetzen. Die Helmholtzresonatoren übernehmen für die Akustik also die Aufgabe der Elektronen in der Optik und verursachen durch ihr Mitschwingen das Dispersionsverhalten des Modellmediums. Unter den Voraussetzungen konstanter Schallschnelle und konstanten Schalldruckes über den gesamten Rohrquerschnitt sowie kontinuierlich verteilter Resonatoren längs des Rohres führt die rechnerische Behandlung der Anordnung auf einen Brechungsindex, der mit dem optischen Brechungsindex formal völlig übereinstimmt, und rechtfertigt somit die akustische Nachbildung der Ausbreitung eines optischen Signals durch vorliegendes Modell.

Um den Vergleich mit der Sommerfeld'schen Theorie zu ermöglichen, wurde für die Schallsignale dieselbe Impulsform gewählt, wie sie der Rechnung von Sommerfeld und Brillouin zugrunde liegt. Die Frequenz der Schallimpulse umfasste den Bereich von 200 bis 700 Hz; die Resonanzfrequenz der Helmholtzresonatoren betrug 390 Hz.
Als Schallgeber wurde ein Lautsprecher mit nur schwach konischer

Membran verwandt, der direkt an das Rohr angeflanscht war und mit der Bewegung seiner Membran die Schallschnelle am Eingang des Modellmediums vorschrieb. Um akustische Rückwirkungen auf den Lautsprecher nach Möglichkeit auszuschliessen, wurde die Membranmasse künstlich vergrössert. Diese Vergrösserung wirkte sich gleichzeitig günstig auf den Frequenzgang des Lautsprechers aus und gestattete eine formgetreue Umwandlung des vorgegebenen elektrischen Impulses in ein Schallsignal. Am Ende des Modellmediums nahm ein Schallschnelleempfänger - Druckgradientmikrophon - den verformten Schallimpuls auf. Es handelte sich dabei um ein Kondensatormikrophon mit durchbrochener Gegenelektrode, dessen Membran aus einem leitfähig gemachten Zaponlackhäutchen von 0,5 μ Dicke hergestellt war. Die Abmessungen der Mikrophonkapsel, die in der Rohrmitte zentral gelagert war, mussten zur Vermeidung störender Reflexionen möglichst klein gehalten werden.
Der vom Empfänger abgegebene Spannungsimpuls gelangte über entsprechende Verstärker auf einen Oszillographen, dessen Zeitablenkung synchron mit dem Auslösen des Schallimpulses auf der Geberseite eingeschaltet wurde. Der auf dem Oszillographenschirm aufgezeichnete Impulsverlauf konnte somit zu Laufzeitmessungen herangezogen werden.
Den Abschluss des Modellmediums bildete ein akustischer Wellensumpf, der die Aufgabe hatte, die ankommende Schallenergie zu absorbieren und damit eine Reflexion der Schallimpulse am Rohrende zu verhindern.

Die Auswertung der durch photographische Aufnahme der Oszillographenbilder gewonnenen Messergebnisse ergab qualitative Übereinstimmung mit den Rechnugen von Sommerfeld und Brillouin. Eine quantitative Bestätigung der Theorie war nicht zu erwarten, da einmal die Theorie nur näherungsweise auszuwerten war und zum andern die anfangs angedeuteten vereinfachenden Bedingungen bei der experimentellen Anordnung nicht vollständig zu verifizieren waren.

Literatur: M.v.Laue, Annal.d.Phys. 18/1905/p.523
A.Sommerfeld, Annal.d.Phys. 44/1914/p.177
L.Brillouin, Annal.d.Phys. 44/1914/p.203

Lebenslauf.

Am 1.März 1927 wurde ich, Theo Ankel, als Sohn des Lehrers Heinrich Ankel und seiner Ehefrau Melanie, geb. Deubner, in Wiesbaden geboren. Ich besuchte die Volksschule an der Lahnstrasse und trat 1937 in die Oberschule für Jungen ein, aus der ich 1944 mit dem Reifevermerk ausschied. Vom Februar 1943 bis zum August 1944 erfüllte ich meine Dienstverpflichtung als Luftwaffenhelfer. In einem Sonderlehrgang für Kriegsteilnehmer wurde mir am 17.5.1946 das Zeugnis der Reife ausgestellt. Vom SS 46 bis zum SS 50 war ich an der Johannes-Gutenberg-Universität in Mainz immatrikuliert und legte am 1.7.1948 die Vordiplomprüfung und am 3.11.1950 die Diplomphysiker-Hauptprüfung ab. Im SS 51 setzte ich mein Studium an der Johann-Wolfgang-Goethe-Universität in Frankfurt a.Main fort.
Vom 1.4.1951 bis 30.4.1952 war ich als wissenschaftliche Hilfskraft am Institut für angewandte Physik der Universität Frankfurt tätig; seit 1.5.1952 bin ich mit der Verwaltung der Dienstgeschäfte eines Assistenten am gleichen Institut beauftragt. Neben dieser Tätigkeit fertigte ich meine Doktorarbeit an.

1. Referent: Prof.Dr. H.Dänzer
2. Referent: Prof.Dr. M.Czerny

Tage der mündlichen Prüfung: 11. und 14. Dezember 1954.

54/170 x 1